Γεωμετρική Κατανομή: 16/11/17

Θεωρούμε τ.π. που:

Γ1) Αποτελείται από μια ακολουθία επαναλήψεων μιας στοιχειώδους διαδικασίας

Γ2) Σε κάθε επανάληψη $\rightarrow$ E, A

Θεωρώ (τ.π) που αποτελείται από μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli.

Αυτό που με ενδιαφέρει είναι: X = πλήθος των επαναλήψεων μέχρι την πρώτη E

τιμή της τ.μ. X : $x = 1, 2, 3, \ldots$

X διακριτή τ.μ. $\longrightarrow P_X$ (σ.π.)

$$P_X(x) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} P(X=x)$$

$$= P\left(\begin{matrix}\text{απαιτούνται } x\text{-επαναλήψεις} \\ \text{μέχρι την 1η επιτυχία}\end{matrix}\right)$$

$$= P : (\underbrace{A \ldots A}_{x-1} E)$$

Γ3) Έστω οι επαναλήψεις είναι ανεξάρτητες

$$\Gamma 3: \underbrace{P(A)\,P(A) \ldots P(A)}_{x-1} P(E)$$

Γ4) Έστω η πιθανότητα επιτυχίας είναι αμετάβλητη από επανάληψη σε επανάληψη και ίση με $p (0 < p < 1)$

Δηλ. $P(E) = p$ και $P(A) = 1 - p = q$

$$\overset{(\Gamma 4)}{\Rightarrow} P_X(x) = [P(A)]^{x-1} \cdot P(E)$$

$$= q^{x-1} \cdot p, \quad x = 1, 2, 3 \ldots$$

Είναι η $P_X(x)$ σ.π.;

i) $P_X(x) \geq 0$

ii) $\sum_{x=1}^{\infty} P_X(x) = 1$;

Scanned by CamScanner

$$\sum_{x=1}^{\infty} P_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} p = p \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = p \sum_{x-1=0}^{\infty} q^{x-1} =$$

$$p \sum_{v=0}^{\infty} q^{v} = p \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

Άθροισμα άπειρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου

Αν $|a|<1$ τότε $\sum_{v=0}^{\infty} a^{v} = \frac{1}{1-a}$

<u>Ορισμός:</u> Η τ.μ. X λέγεται γεωμετρική με παράμετρο p $(0<p<1)$ αν το σύνολο των δυνατών τιμών της X είναι $x = 1,2,\ldots$ και η (σ.π.) της X.

$$P_X(x) = p\, q^{x-1}, \quad x = 1,2,\ldots \qquad q = 1-p$$

<u>Συμβολισμός:</u> $X \sim Geo(p)$

Εφαρμόζεται σε κάθε πρόβλημα που αποτελείται από μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με αμετάβλητη $P(E)=p$

<u>Παράδειγμα:</u> Ένα ζάρι ρίχνεται επανειλημμένα. Ποια η πιθανότητα το πρώτο ⚅ : α) να εμφανιστεί στην 6^{η} ρίψη; β) μετά την 6^{η} ρίψη;

<u>Λύση:</u> Έστω $E = \{$το αποτέλεσμα οποιασδήποτε ρίψης είναι ⚅$\}$

$X \sim Geo(p = P(E))$

$p = P(E) = \frac{1}{6}$

$$P_X(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \quad x = 1,2,\ldots$$

α) $P(X=6) = P_X(6) = \left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6-1} =$

....

Scanned by CamScanner

β) $P(X>6) = \sum_{x>6} P_X(x) = \sum_{x=7}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \frac{1}{6}\sum_{x=7}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = (*)$

$P(X>6) = 1 - P(X\le 6) = 1 - \sum_{x=1}^{6} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$

$$(*) = \frac{1}{6}\sum_{x=7}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{-6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\sum_{x=7}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-7}$$

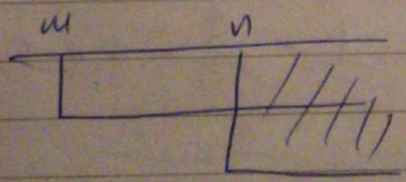
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\sum_{x-7=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-7} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{\nu}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{6}} = \dots$$

Ιδιότητα Αμνησίας Γεωμετρικής Κατανομής

Πρόταση: Έστω τ.μ. $X \sim Geo(p)$. Αν $m, n = 1, 2, 3 \dots$ τότε $P(X>m+n \mid X>m) = P(X>n)$

Απόδειξη: $P(X>m+n \mid X>m) = \dfrac{P(X>m+n \text{ κ' } X>m)}{P(X>m)}$



$= \dfrac{P(X>m+n)}{P(X>m)} = \dots = P(X>n)$

Scanned by CamScanner

Παράδειγμα: P(πετύχει στόχο) $= 0,1$

$P =$ (να πετύχει το στόχο μετά από πέντε προσπάθειες αν έχει προσπαθήσει ανεπιτυχώς περισσότερες από 3 φορές)

$E =$ {να πετύχει το στόχο σε οποιαδήποτε προσπάθεια} $\quad P(E) = p = 0,1$

Έστω X πλήθος των στοχεύσεων μέχρι να πετύχει το στόχο για πρώτη φορά.

P (να πετύχει το στόχο μετά από 5 προσπάθειες αν έχει ήδη προσπαθήσει ανεπιτυχώς 3 φορές) $= P(x>5 / x>3) =$

$$= \frac{P(x>5 \text{ κ' } x>3)}{P(x>3)} = \frac{P(x>5)}{P(x>3)} = \frac{1-P(x\leq 5)}{1-P(x\leq 3)} =$$

$$= \frac{1 - \sum_{x=1}^{5} 0,1 \times 0,9^{x-1}}{1 - \sum_{x=1}^{3} 0,1 \times 0,9^{x-1}}$$

$$P(x>2+3 / x>3) = P(x>2) = 1 - P(x\leq 2) =$$
$$= 1 - \sum_{x=1}^{2} 0,1 \times 0,9^{x-1}$$

Scanned by CamScanner

Αρνητική Διωνυμική Κατανομή

Θεωρώ τ.π. που υπακούει στις προϋποθέσεις Γ1) → Γ4) της γεωμετρικής κατανομής

Με ενδιαφέρει: X = πλήθος επαναλήψεων μέχρι την k-E , $k = 1, 2, 3, \ldots$

Τιμές της X: $x = k, k+1, k+2, \ldots$

X διακριτή τ.μ.

↓

Ζητώ P_X;

Έστω τυχόν $x = k, k+1, \ldots$

$P_X(x) \overset{ορ.}{=} P(X = x) = P$ (k-1 E στις x-1 επαναλήψεις και E στην x επανάληψη)

$= (**)$

$$P\Big(\text{όλων των } \underbrace{AEAE\ldots A}_{\substack{k-1 \to E \\ k-1 \to A}}\ \underset{x \text{ επαναλήψεις}}{E}\Big) \overset{Γ3)}{=} \underbrace{P(A)P(E)P(A)P(E)\ldots P(A)\overset{x \text{ επαν.}}{P(E)}}_{\substack{k-1 \to P(E) \\ x-k \to P(A)}}$$

πιθανότητες όλων των αντίστοιχων x-άδων

$$\overset{Γ4}{=} \underbrace{q\cdot p \cdot q \cdot p \ldots q \cdot}_{\substack{k-1 \to p \\ x-k \to q}} \overset{x \text{ επαν.}}{p} = p^k q^{x-k}$$

πόσες είναι οι x-άδες με

i) Έστω x-θέσεις

ii) k-1 E και x-k A στις x-1 θέσεις $\leftarrow \binom{x-1}{k-1 \quad x-k} = \binom{x-1}{k-1}$

Scanned by CamScanner

(**) $\Rightarrow P_X(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$, $x = k, k+1, \ldots$ $k=1,2,\ldots$
$q = 1-p$, $0<p<1$

Είναι η P_X συνάρτηση πιθανότητας;

Δηλ. $P_X(x) \geq 0$
$\sum_{x=1}^{\infty} P_X(x) = 1 \leftarrow$ } ισχύουν

Ορισμός: Η τ.μ. X λέγεται αρνητική διωνυμική με παραμέτρους k και p ($k=1,2,\ldots$, $0<p<1$) αν το σύνολο των δυνατών τιμών της X είναι $k, k+1, \ldots$ και η σ.π.

$$P_X(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \quad x = k, k+1, \ldots, \quad k=1,2,\ldots$$
$0<p<1$
$q = 1-p$

Συμβολισμός: $X \sim NB(k,p)$

Παράδειγμα: Ζάρι ρίχνεται επανειλημμένα
P(η τέταρτη εμφάνιση άρτιου αποτελέσματος να συμβεί στην δέκατη ρίψη)

$E = \{\text{αποτ. άρτιος}\}$

Έστω τ.μ. X παριστά το πλήθος των ρίψεων μέχρι την 4^{η} E.

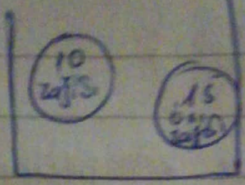
$$X \sim NB\left(k=4, p = P(E) = P(\text{άρτιος}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\right)$$

$$P(X=10) = P_X(10) = \binom{10-1}{4-1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-4}$$

Scanned by CamScanner

επανατοποθέτηση

Παράδειγμα:



Εαν τραβήξω 2 μπάλες τότε θα έχω υπεργεωμετρική κατανομή

α) Αν γίνουν τρεις κληρώσεις, ποια η πιθανότητα ακριβώς μια κλήρωση να περιέχει ταξίδι;

β) Ποια η πιθανότητα να χρειαστούν τέσσερις κληρώσεις μέχρι να εμφανιστεί η πρώτη που θα περιέχει ταξίδι;

γ) Ποια η πιθανότητα το τρίτο ταξίδι να κληρωθεί στην έκτη κλήρωση;

<u>Λύση</u>: α) $E = \{$να κληρωθεί ταξίδι$\}$

Έστω X φορές που κληρώθηκε ταξίδι
(X πλήθος των E) στις τρεις κληρώσεις

$$X \sim B\left(n=3,\ p = P(E) = \frac{10}{25}\right)$$

$$P_X(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{10}{25}\right)^x\left(\frac{15}{25}\right)^{3-x} \quad \text{για } x=0,1,2,3$$

$$P(X=1) = P_X(1) = \binom{3}{1}\left(\frac{10}{25}\right)^1\left(\frac{15}{25}\right)^{3-1} = \ldots$$

$E = \{$κληρωθεί ταξίδι$\}$

β) Έστω X πλήθος των κληρώσεων έως ότου για πρώτη φορά να κληρωθεί ταξίδι.

$$X \sim Geo\left(p = P(E) = \frac{10}{25}\right)$$

$$P_X(x) = p\cdot q^{x-1} = \frac{10}{25}\left(\frac{15}{25}\right)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

$$P(X=4) = P_X(4) = \frac{10}{25}\left(\frac{15}{25}\right)^{4-1} = \ldots$$

Scanned by CamScanner

γ) E = {να κληρωθεί ταξίδι}

Έστω X πλήθος των κληρώσεων (επαναλήψεων) μέχρι την $3^{η}$ E.

$$X \sim NB\left(k=3,\ p=P(E)=\frac{10}{25}\right)$$

$$P_X(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} = \binom{x-1}{3-1}\left(\frac{10}{3}\right)^3\left(\frac{15}{25}\right)^{x-3},\ x=3,4,5\ldots$$

$$P(X=6) = P_X(6) = \binom{6-1}{3-1}\left(\frac{10}{25}\right)^3\left(\frac{15}{25}\right)^{6-3} = \ldots$$

Προσοχή: $\dfrac{\binom{10}{2}\binom{15}{0}}{\binom{25}{2}}$

Z τ.μ. πλήθος των ταξιδιών

$Z \sim Hg\,(10, 15, 2)$

$P_Z(2)$

Ασκ. 4.62.

Scanned by CamScanner